

Lecture 15: 树与二叉树

15.1 树的基本概念

15.1.1 什么是树

概念：树的逻辑结构

- 概念：
 - 从树根生长，逐级分支
- 空树：
 - 结点数为 0 的数
- 叶子节点：
 - 没有后继的结点称为叶子节点（也成为或非终端结点）
- 分支结点：
 - 有后继的结点称为分支结点（或非终端结点）
- 特性：
 - 除了根节点外，任何一个节点都有且仅有一个前趋；
 - 每个节点可以有 0 个或多个后继；

定义： #树

描述：树是 n ($n \geq 0$) 个结点的有限集合， $n = 0$ 时，称为 **空树**，这是一种特殊情况。再任意一颗非空树中应满足：

1. 有且仅有一个特定的称为 **根** 的结点。
2. 当 $n > 1$ 时，其余结点可分为 m ($m > 0$) 个互不相交的有限集合 $T_1, T_2, \dots, T_m$ ，其中每个集合本身又是一棵树，并且称为根节点的 **子树**。

解释

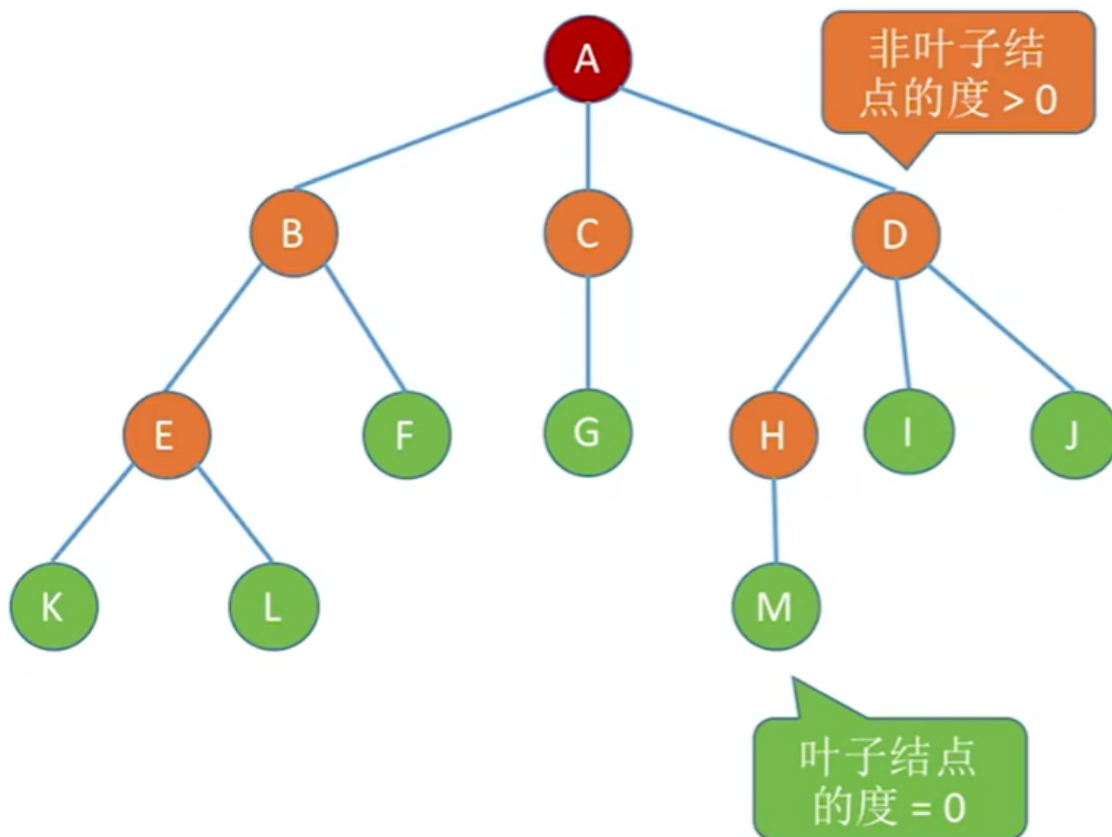
- 子树之间互不相交，且子树可以再看为一个其他新的子树；

15.1.2 结点树的属性描述

概念：基础属性介绍

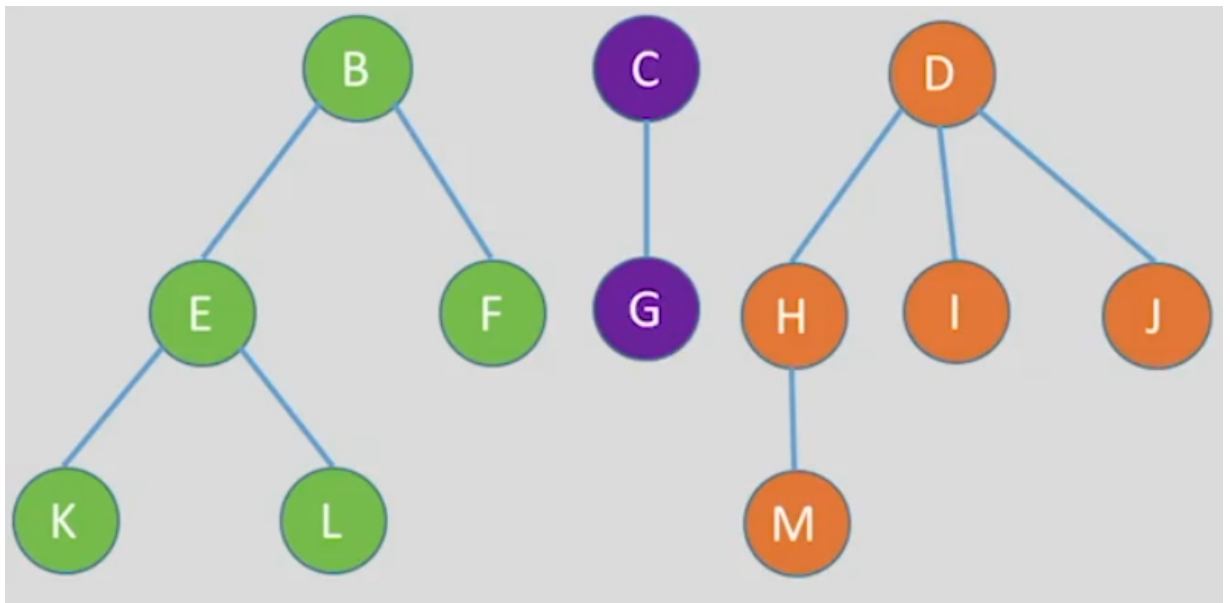
- 路径：
 - 树的路径：从上往下递归，只能往一个方向走；
 - 路径长度：经过了几条边；
- 深度：
 - 结点的层次（深度）：结点从上往下数；
 - 注意：结点的层次默认从 **1** 开始；
- 结点的高度：结点从下往上数；

- 树的高度 (深度): 树总共多少层;
- 度:
 - 结点的度: 有几个孩子 (分支);
 - AG: B 的度为 2, D 的度为 3;
 - 树的度: 各个结点的度当中的最大值;
 - AG: 树的度为 3;
- 有无序:
 - 有序树: 逻辑上看, 树中结点的各个子树从左至右是有次序的, 不能互换;
 - 无序树: 逻辑上看, 树中结点的各子树从左至右是无次序的, 可以互换;
- 树的路径长度:
 - 树根到每个路径的长度总和;
- 图示:



森林

- 森林是 m (m 大于等于 0) 棵互不相交的树的集合;
- 图示:



15.2 树的性质

15.2.1 树的常考性质

考点一：结点度与总结点数

- 结点的度：结点有几个孩子 (分支)
- 公式：总结点数

- $$\text{总结点数 } n = \text{总度数} + 1$$

- 注意：因为根节点没有父节点，所以要加+1

- $$\text{总结点数 } n = \text{总度数} + 1 = 1 * n_1 + 2 * n_2 + \dots + n * n_n + 1$$

- $$\text{总结点数 } n = n_0 + n_1 + n_2 + \dots + n_n$$

- 公式：总度数

- $$\text{总度数} = n - 1$$

- $$\text{总度数} = 0 * n_0 + 1 * n_1 + 2 * n_2 + \dots + n * n_n$$

- 公式：叶子节点的个数

- $$n_0 = \sum_{i=2}^m (i - 1)n_i + 1$$

- 公式：边

- 树：

n 个结点的树，有 $n - 1$ 条边

- 森林:

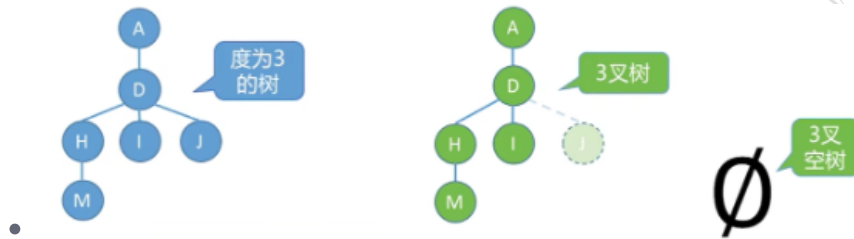
$$\text{结点数} - \text{边数} = \text{森林数}$$

考点二: 度为 m 的树, m 叉树的区别

- 树的度:
 - 各结点的度的最大值 (至少存在一个节点, 其度为 m)
- m 叉树:
 - 每个结点最多只有 m 个孩子的树 (可以存在一个简单, 其度为 m , 但也可以全部都小于 m)
- 表格:

度为 m 的树	m 叉树
任意结点的度 $\leq m$ (最多 m 个孩子)	任意结点的度 $\leq m$ (最多 m 个孩子)
至少有一个结点度 $= m$ (有 m 个孩子)	允许所有结点的度都 $< m$
一定是非空树, 至少有 $m+1$ 个结点	可以是空树

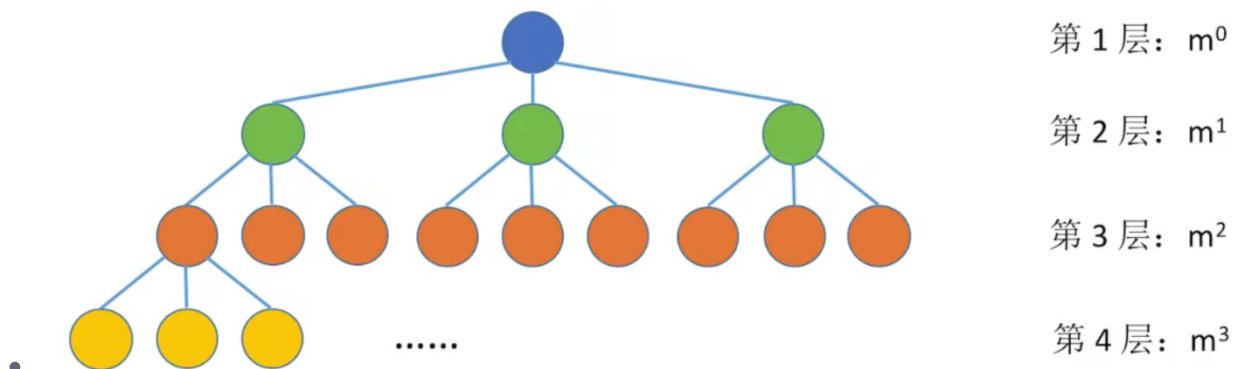
- 图示:



- 度 m 树是 m 叉树的真子集

考点三: 度为 m 的树第 i 层至多有 m^{i-1} 个结点 ($i \geq 1$)

- M 叉树同理
- 图示:



考点四: 高度为 h 的 m 叉树至多有 $\frac{m^h-1}{m-1}$ 个结点

- 实际上就是 $m^0, m^1, m^2, \dots$ 的累加和;

考点五

- 高度为 h 的 m 叉树至少有 h 个结点
- 高度为 h , 度为 m 的树至少有 $h+m-1$ 个结点

考点六

- 具有 n 个结点的 m 叉树的最小高度为
- $\lceil \log_m(n(m-1) + 1) \rceil$
- 高度最小的情况——所有结点都有 m 个孩子

获取笔记持续更新可加微信: WandD2277