

Lecture 20: 图基本概念

20.1 基本概念

20.1.1 图的定义

定义: #图

描述: 图 G 由顶点集 V 和边集 E 组成, 记为 $G = (V, E)$, 其中 $V(G)$ 表示图 G 中顶点的有限非空集, $E(G)$ 表示图 G 中顶点之间的关系(边)集合。

- 若 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 则用 $|V|$ 表示图 G 中顶点的个数, 也称图 G 的 阶, $E = \{(u, v) | u \in V, v \in V\}$, 用 $|E|$ 表示图 G 中边的条数。

解释

- 注意:
 - 线性表可以是空表, 树可以是空树, 但图不可以是空, 即 V 一定是非空集;
- 名词:
 - G : Graph 图
 - V : Vertex 顶点
 - E : Edge 边 (一定要有两个顶点)

20.1.2 常见图

无向图

- 定义:
 - 若 E 是无向边(简称 边)的有限集合时, 则图 G 为无向图。
- 概念:
 - 边是顶点的无序对, 记为 (v, w) 或 (w, v) ;
 - 因为 $(v, w) = (w, v)$, 其中 v, w 是顶点。可以说顶点 w 和顶点 v 互为邻接点。边 (v, w) 依附于顶点 w 和 v , 或者说边 (v, w) 和顶点 v, w 相关联。

有向图

- 定义:
 - 若 E 是有向边(也称 弧)的有限集合时, 则图 G 为有向图。
- 概念:
 - 弧是顶点的有序对, 记为 $\langle v, w \rangle$, 其中 v, w 是顶点, v 成为弧尾, w 称为弧头, $\langle v, w \rangle$ 称为从顶点 v 到顶点 w 的弧, 也称为 v 邻接到 w , 或 w 邻接自 v 。
 - $\langle v, w \rangle \neq \langle w, v \rangle$

简单图

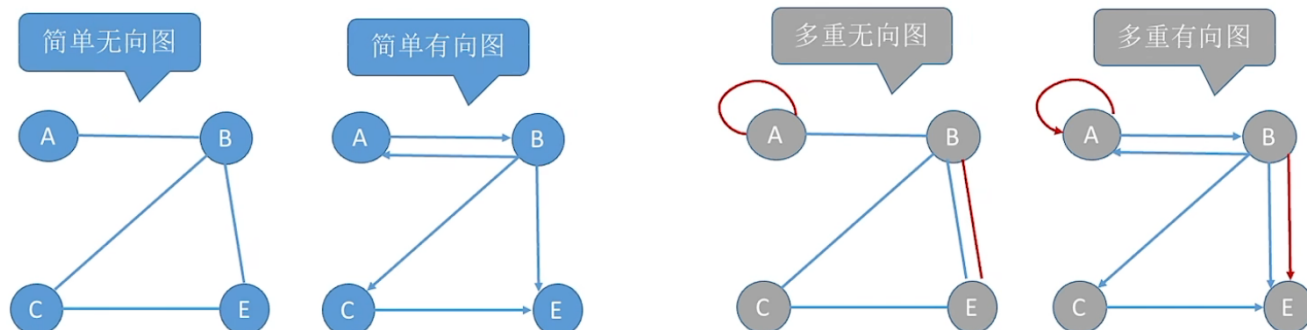
- 1. 不存在重复边

- 2. 不存在顶点到自身的边

多重图

- 1. 图 G 中某两个结点之间的**边数多于一条**；
- 2. 允许顶点通过同一条边和自己关联，则 G 为多重图

图示总结



20.1.3 顶点

顶点的度

- 对于无向图：
 - 概念：
 - 顶点 v 的度是依附于该顶点的边的条数，记为 $TD(v)$
 - 数量：
 - 在具有 n 个顶点， e 条边的**无向图**中：

$$\sum_{i=1}^n TD(v_i) = 2e$$

- 无向图的全部顶点的度的和等于边数的 2 倍；

- 对于有向图：
 - 入度：
 - 是以顶点 v 为**终点**的有向边的数目，记为 $ID(v)$
 - 出度：
 - 是以顶点 v 为**起点**的有向边的数目，记为 $OD(v)$
 - 数量：

- 顶点 v 的度：
 - 等于其入度和出度之和：

$$TD(v) = ID(v) + OD(v)$$

- 在具有 n 个顶点， e 条边的有向图中：
 - 入度和与出度和相等；

$$\sum_{i=1}^n ID(v_i) = \sum_{i=1}^n OD(v_i) = e$$

顶点-顶点的关系描述

- 路径：
 - 顶点 v_p 到顶点 v_q 之间的一条路径是指**顶点序列**；
- 回路：
 - 第一个顶点和最后一个顶点**相同的路径**称为回路或**环**；
- 简单路径：
 - 在路径序列中，**顶点不重复**出现的路径称为简单路径
- 路径长度：
 - 路径上边的数目；
- 点到点的距离：
 - 从顶点 u 出发到顶点 v 的**最短路径**若存在，则此路径的长度称为从 u 到 v 的距离；
 - 若从 u 到 v 根本不存在路径，则记该距离为无穷(∞)
- 连通性：
 - 无向图：
 - 若顶点 v 到顶点 w 有路径存在，则称 v 和 w 是连通的；
 - 有向图：
 - 若从顶点 v 到顶点 w 和从顶点 w 到顶点 v 之间都有路径，则称这两个顶点是强连通的；
 - 即：既有正向的路径，也有逆向的路径；
- 连通图：
 - 若图 G 中任意两个顶点都是连通的，则称图 G 为连通图，否则称为非连通图；
- 强连通图：
 - 在有向图中，若图中任何一对顶点 v 和 w ，都有 v 到 w 、 w 到 v 的路径（强连通），则称此图为强连通图；

常考性质

- 性质一：
 - 对于 n 个顶点的无向图 G ，若 G 是连通图，则最少有 $n-1$ 条边；
- 性质二：
 - 若 G 是非连通图，则最多可能有 C_{n-1}^2 条边；
- 性质三：
 - 对于 n 个顶点的有向图 G ，若 G 是强连通图，则最少有 n 条边 (形成回路)

20.1.4 子图

定义： **#子图**

描述：设两个图 $G = (V, E)$ 和 $G' = (V', E')$ ，若 V' 是 V 的子集，且 E' 是 E 的子集，则称 G' 是 G 的子图。若有满足 $V(G') = V(G)$ 的子图 G' ，则称其为 G 的生成子图；

解释

- 前提：
 - 子图首先得是图；
- 生成子图：
 - 当前生成的子图包含图的全部点，只是去掉了一些边；

连通分量

- 概念：
 - 无向图中的极大连通子图称为连通分量；

极大连通子图：

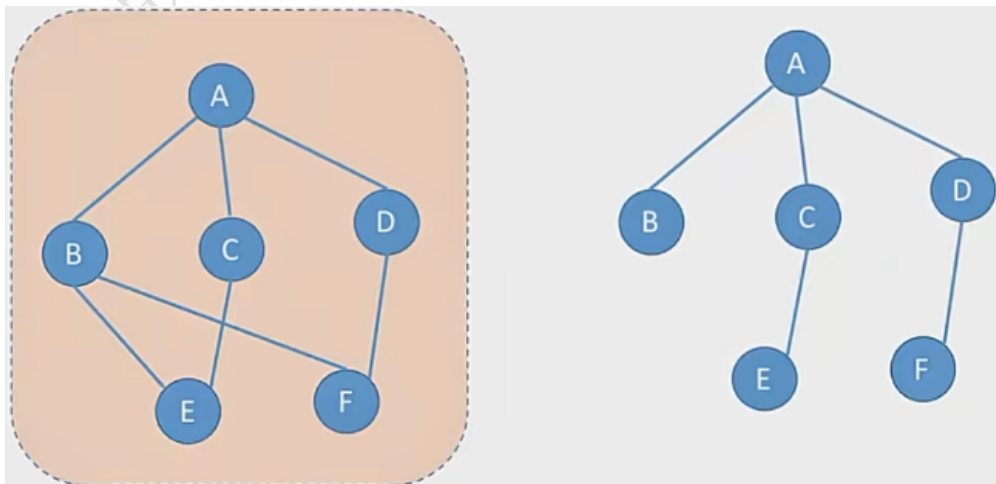
- 子图必须满足以下两个条件：
 1. 连通；
 2. 包含尽可能多的顶点和边；

强连通分量

- 概念：
 - 有向图中任意两个顶点之间都有方向相反的两条路径，则可构成一个强连通分量；

生成树

- 概念：
 - 连通图的生成树是包含图中全部顶点的一个极小连通子图；
 - 极小 $\rightarrow$ 子图中的边要尽可能地少；
- 性质：
 1. 若图中顶点数为 n ，则它的生成树含有 $n - 1$ 条边；
 2. 对生成树而言，若砍去它的一条边，则会变成非连通图，若加上一条边则会形成一个回路；
- 数量：
 -
- 图示：



生成森林

- 概念：
 - 在非连通图中，**连通分量的生成树**构成了非连通的生成森林

权值

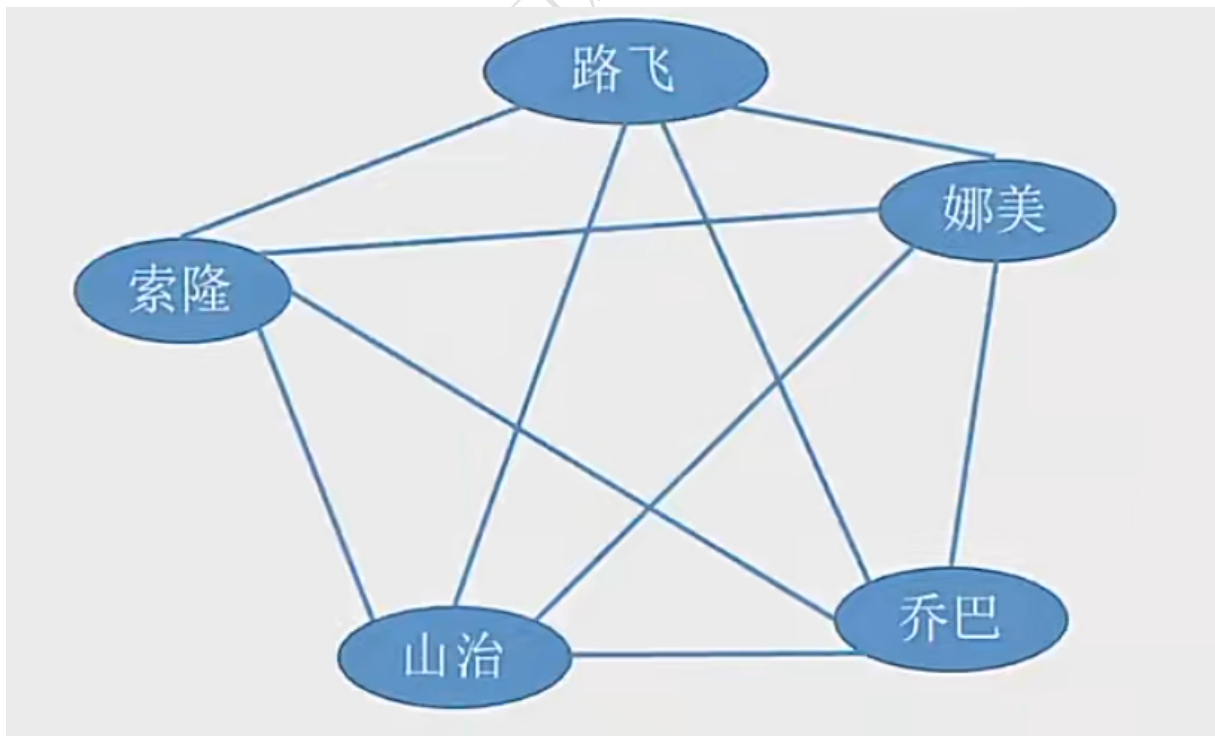
- 边的权：
 - 在一个图中，每条边都可以标上具有某种含义的数值，该数值称为该边的权值；
- 带权图/网：
 - 边上带有权值的图称为带权图，也称网；
- 带权路径长度：
 - 当图是带权图时，一条路径上所有边的权值之和，称为该路径的带权路径长度；

20.1.5 其他特殊图

无向完全图

- 无向完全图：
 - 无向图中任意两个顶点之间都存在边；
- 性质：
 - 若无向图地顶点数为 $|V| = n$ ，则：
 - $|E| \in [0, C_n^2] = [0, n(n-1)/2]$

- 图示：



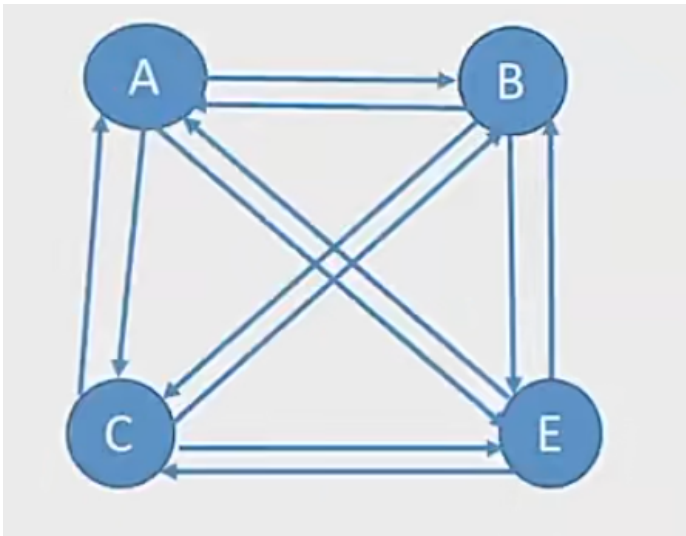
有向完全图

- 概念：
 - 有向图中任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧；
- 性质：

- 若有向图地顶点数为 $|V| = n$, 则:

- $|E| \in [0, 2C_n^2] = [0, n(n-1)]$

- 图示:



20.2 性质总结

概念: 性质总结

- 图示:

完全图

无向图: $|E|_{\text{无}} \in (0, \frac{n \cdot (n-1)}{2})$ → 连通的前提下, 边位置任意时, 最小的 $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$
↓ 完全图
(n-1)个完全图
↓ 1个点
莫定得一条边

有向图: $|E|_{\text{有}} = 2|E|_{\text{无}} \in (0, n \cdot (n-1))$

连通性

无向图: **连通图** → 连通分量
↓
 $|E|_{\min} = n-1 \Rightarrow$

有向图: **强连通图** → 强连通分量
↓
 $|E|_{\min} = n \Rightarrow$

最小连通子图 ↓
生成树

度数

无向图: $TD(v) = 2 \cdot |E|_{\text{无}}$
 $TD(v) = TD_1 + TD_2 + \dots + TD_n$
↙ 度为1的总度数
 $TD_n = n \text{度结点数} \cdot n \text{度}$

有向图: $ID(v)$ 入度; $OD(v)$ 出度;
 $TD = ID + OD = 2ID = 2OD;$
 $ID = OD = |E|_{\text{有}}$